J. N. D.

DISSERTATIO MATHEMATICA,

# DOCTRINAM QUANTITATUM SURDARUM

COMPLECTENS,

QUAM,

*Consensu Amplissimæ Facultatis Philosophicæ in Regia Academia Aboënsi,*

JOHANNES BRATT,

*Et*

LAURENTIUS GEZELIUS J. F.

OSTROBOTNIENSIS,

*Publicæ censuræ modeste subjiciunt,*

Die VIII. Maji, Anni MDCCLVI.

Loco horisque ante meridiem solitis.

---

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ R:Æ M:TIS
SUMMÆ FIDEI VIR,
*ILLUSTRISSIME atq; CELSISSIME*
COMES ac HEROS,
# DN. CAROLE GUSTAVE TESSIN,
Regis Regnique Sveciæ SENATOR,
Cancellariæ Regiæ PRÆSES,
Supreme Aulæ PRÆFECTE,
Principi Succeſſori **GUSTAVO**
Ab Educatione SUMME,
Atque Regiæ Academiæ Aboënſis
CANCELLARIE,
Ut & Ordinum Regiorum EQUES,
COMMENDATOR & CANCELLARIE,
Atque Aquilæ Nigræ EQUES,
DOMINE GRATIOSISSIME.

QUI.
Heliconem. Auraicum. Jam. Illuminas.
Ut. Phœbus.
In. Ipſo. Ortu.
Tot. Fulgentiſſimos. Mox. Spargebas. Radios.
Ut. TE. Gloria. Meritorum. Superaturum.
Celſiſſimos. Natales.
Omnes. Haud. Obſcure. Præviderint.
Nec. Mirum.
In. TE. Enim.
Cum. Feliciſſima. Memoria. Et. Studio. Laboris.
Omnes. Divitias. Omnes. Gratias. Omnes. Flores.
Ingenii.
Combinaverat. Natura. Fautrix.
Hinc. TIBI. Suo. Delicio.
Muſæ. Omnia. Scientiarum. Adyta.
Ab. Initio. Mox. Recluſerunt.
Et.
Juſtis. Sic. Cujusque. Scientiæ. Pretiis. Agnitis.
Ea. Depromſiſti. Cimelia.
Quæ. Poſſent. Ingenium. Formare.
Cordi. Virtutem. Inſtillare.
Et. Florem. Civitatum. Promovere.
His. Dein. Gradibus.
Celſiſſimos. Conſcendiſti. Dignitatum. Gradus.
Ubi. Exemplis. Regulis. Et. Decretis. Jam. Perficis.
Quidquid. Judicaveris. Eſſe.
Patriæ. Commodo. Et. Gloriæ.
Providens. Et. Agendi. Sciens.
Ubi. Bilance. Politices.
Vires. Statuum. Europæorum. Libras.
Ne. Quisquam. Eorum.
Nimium. Adquirat. Præpondium.

Pru-

Prudenter. Avertere. Studens.
Ubi. Artes. Scientias. Et. Earum. Cultores. Protegis.
Patronus. Mæcenas.
Caſtalides. Imprimis. Auraicas.
Sollicite. Foves. Blande. Nutris. Prudenter. Recreas.
Numen. Earum. Tutelare.
At.
Si. Sequerer. Morem.
A. Quo. Splendor. Geſtorum. Me. Avocat.
Si. Conarer. Delineare. Virtutes. TUAS.
Inter. Heroas. Togatos.
Summe.
Herculeo. Operi. Juveniles. Non. Sufficerent. Humeri.
Fama. Tua. Tam. Late. Patens. Ac. Orbis.
Elogiis. Et. Laudibus Ubique. Extollitur.
Immortalitati. Dudum. Conſecrata.
Ideo.
Subjectiſſima. Mente. Prædicat. Tantum.
Balbutiens. Mea. Muſa.
Largiſſimos. Gratiæ. Radios.
In. Se. Demiſſos.
Et. Submiſſe. Supplicat.
Digneris.
Fennici. Parnaſſi. Apollo.
Rutilantiſſimo. TUO. Jubare.
Eam. Ulterius. Radiare.

ILLUSTRISSIMÆ TUÆ EXCELLENTIÆ

*Subjectiſſimus cliens,*
JOHANNES BRATT.

# DEFINITIO I.

SI quantitas minor $b$ exacte metiatur majorem $a$, minor vocatur *pars aliquota* majoris, & major *multipla* minoris.

Corollarium. Si $b$ metiatur $a$, hoc eſt, toties contineatur in $a$, quoties unitas in $r$, ſive $a$ ſit $= br$; $b$ etiam multiplum quantitatis $a$, ut $sa$, metietur per $rs$; ſiquidem $as = brs$.

# DEFINITIO II.

Quantitas quædam tertia $c$, quæ duas propoſitas $a$ & $b$ metitur, harum *communis diviſor* vocatur; & erit inſimul earum *maximus diviſor*, ſi nulla alia hacce major easdem menſuret.

Corollarium. Per ſe patet, $b$ in Definitione prima memoratam eſſe communem menſuram, eamque maximam quantitatum $a$ & $b$; nam ut minor $b$ metitur majorem $a$, ita etiam ſe ipſam metitur, & nulla alia, quantitate $b$ major, poteſt eandem menſurare.

## DEFINITIO III.

*Commensurabiles* vocantur quantitates, quæ communem habent divisorem; *Incommensurabiles* contra.

## DEFINITIO IV.

*Quantitas Rationalis* dicitur, quæ unitati commensurabilis exsistit; *Irrationalis* autem vel *surda*, quæ eidem incommensurabilis.

COROLLARIUM. Hinc singulæ quantitates quæ cum rationali communem habent mensuram, sunt etiam ipsæ rationales; quæ vero non habent, sunt irrationales vel surdæ.

## THEOREMA I.

*Quantitas z, quæ seorsim metitur quascunque alias c & d, etiam mensurabit earum summam & differentiam.*

*Demonstr.* Metiatur z quantitatem $c$ per $r$, & $d$ per $s$, ita ut $c = rz$, & $d = sz$; tunc $c \pm d = rz \pm sz = \overline{r \pm s}.\, z$; ergo z toties continetur in $c \pm d$, quoties unitas in $r \pm s$.

## THEOREMA II.

*Si* y *sit communis mensura quantitatum* c *&* d, *atque* d *non exacte metiatur* c, *sed detur residuum* e, *etiam* y *hoc residuum mensurabit; Sique* e *metiatur minorem* d, *residuo existente* f, *etiam hoc residuum mensurabitur ab* y, *& ita porro; donec, subtrahendo, quoties possibile, quodlibet residuum ex proxime antecedenti, perventum fuerit ad tale, quod exacte metiatur*

*præ-*

*præcedens, quod ultimum etiam mensurabitur per* y, *& erit quantitatum propositarum* c *&* d *maxima communis mensura.*

*Demonstr.* Supponamus $c=rd+e$, hoc est $c-rd=e$; quandoquidem $y$ supponitur mensurare $c$ & $d$, etiam mensurabit $rd$, ( Cor. Def. I. ) & $c-rd$, ( Theor. I. ) hoc est $e$. Ulterius sit $d=se+f$, id est $d-se=f$; cum $y$ metiatur $d$ per hypothesin, & $e$ per modo demonstrata, etiam mensurabit $se$ & $d-se$, hoc est $f$. Et simili demonstratione patet $y$ mensuraturam fore cetera residua, si plura fuerint, hincque ultimum residuum quod exacte metitur præcedens.

Porro hoc ultimum residuum, quod sine reliquo metitur antecedens, fore maximam communem mensuram quantitatum $c$ & $d$ asserimus.

Sit $f$ tale residuum; & veritas asserti ordine retrogrado, per æquationes modo allatas $c=rd+e$, $d=se+f$, $e=tf$, patebit. Quia enim $f$ metitur $e$, mensurat etiam $se$, ( Cor. Def. I. ) & hinc $se+f$ sive $d$ ( Theor. I. ); & quia metitur $d$ & $e$, etiam metietur $rd+e$ sive $c$, consequenter erit quantitatum $c$ & $d$ communis mensura. Sed insimul erit maxima mensura; per modo enim demonstrata omnis mensura communis quantitatum $c$ & $d$ mensurabit $f$; maxima vero quantitas quæ exacte dividit $f$ est illa ipsa; quæ idcirco erit maxima communis mensura quantitatum $c$ & $d$.

Cor. Si continuo, & quoties possibile est, subtrahendo quodlibet residuum ex proxime præcedenti, ad residuum tale non pervenire datur, quod metiatur præcedens, quantitates propositæ $c$ & $d$ nullam habebunt communem mensuram; adeoque incommensurabiles erunt.

## SCHOLION I.

Si evitare voluerimus tædiosas operationes circa indagandum maximum communem divisorem quantitatum compositarum sæpe occurrentes, sequentia erunt observanda: Quantitas una propositarum dividatur per maximum simplicem divisorem, si talis adsit: similiter altera per suum maximum divisorem simplicem; exsurgentes quoti per se invicem dividantur, & si, peracta operatione, detur residuum, idque divisorem quendam simplicem habeat, id ipsum per hunc ad simpliciorem formam reducatur, & per novam hoc modo emergentem quantitatem divisor compositus præcedentis operationis dividatur. Si post hanc operationem denuo residuum detur, hoc ad simpliciorem expressionem reducatur, si sit reducibile, & dein per quantitatem hinc prodeuntem compositus divisor proxime antecedentis operationis dividatur. Hæ operationes repetantur, donec perveniatur ad ejusmodi residuum, quod exacte dividat divisorem præcedentis operationis, quod erit quantitatum propositarum maximus communis divisor. Inveniatur ex. gr. maximus communis divisor quantitatum $5x^5 + 10x^4d + 5x^3d^2$, & $x^3d + 2x^2d^2 + 2xd^3 + d^4$. Dividendo priorem per $5x^3$ & poste-

posteriorem per $d$, exsurgent $x^2+2xd+d^2$, & $x^3+2x^2d+2xd^2+d^3$. Majori harum per minorem divisa, residuum erit $xd^2+d^3$, quo per $d^2$ diviso, exsurgit quantitas $x+d$. Per hanc dividatur divisor præcedentis operationis $x^2+2xd+d^2$, & divisio succedit sine residuo; est itaque $x+d$ maxima communis mensura quantitatum propositarum.

## SCHOLION II.

Occupati in exsequendis iis, quæ Scholion præcedens præcipit, detegimus interdum, divisa per ipsius maximum simplicem divisorem vel una quantitatum datarum, vel aliquo residuorum sub operatione prodeuntium, compositum quendam divisorem, per quem nominata quantitas data, vel dictum residuum adhuc est reducibile, & reductio peragatur, si hic non sit ipse mensura, vel non habeat communem mensuram cum dividendo ejus operationis. Si vero ita, vel ejusdem reductio per dictum divisorem compositum omittatur, vel simul ~~eum~~ dividendus operationis reducatur per communem eorum mensuram; quo in casu, post integram operationem absolutam debemus per eandem communem mensuram multiplicare communem divisorem detectum quantitatum propositarum; alias enim idem non erit earum maximus communis divisor. Quæratur ex. gr. maxima communis mensura quantitatum compositarum $kme+kne+m^2e+mne-hkm-hkn-hm^2-hmn$, & $kge+gme+kle+lme-ghk-gmh-klh-lmh$; heic divisor per $kg+gm+kl+lm$ potest reduci ad $e-h$, quæ composita quantitas ambas propositas metitur, minime autem est earum maxima mensura. Habet enim $kg+gm+kl+lm$ communem mensuram $k+m$ cum dividendo operationis, adeoque, si reductio instituatur, post integram operationem finitam $e-h$ multiplicabitur per $k+m$, eritque $ek-hk+em-hm$ maxima communis mensura quantitatum propositarum.

## DEFINITIO V.

*Numeri inter se primi* sunt, quorum maxima communis mensura est unitas.

COROLL. Si numeri quicunque $a$ & $b$ sint inter se primi, & $x$ supponatur mensurare $a$ per $m$, ita ut $a=mx$, erit $x$ numerus primus alteri $b$. Detur enim si potest communis mensura $d$ quantitatum $b$ & $x$; ea quia mensurat quantitatem $x$, mensurabit etiam multiplum ejus $mx$ sive $a$, (Cor. Def. I.) consequenter $d$ esset communis mensura numerorum $a$ & $b$, quod est contra hypothesin.

## THEOREMA III.

*Numeri minimi* x *&* y *in aliqua proportione, semper metiuntur alios quoscunque* c *&* d, *qui cum iisdem sunt in eadem proportione.*

*Dem.* Quia $x:y=c:d$ per hypothesin, atque $x$ & $y$ sunt minores ceteris, erunt, vel partes aliquotæ, vel aliquantæ eorundem. Sunto aliquantæ, si possibile. Quia jam $x$ tot particulas τȣ $c$ in se continet, quot $y$ habet ex $d$; resolvatur $x$

 in

in particulas τῦ $c$, & vocetur una illarum $r$; ſimiliter reſolvatur $y$ in particulas τῦ $d$, & dicatur una earum $s$; erit adeo $r:s=x:y=c:d$, conſequenter $x$ & $y$ non erunt minimi numeri, qui cum $c$ & $d$ in eadem proportione eſſe poſſunt; quod eſt contra hypotheſin; adeoque $x$ & $y$ erunt numerorum $c$ & $d$ partes aliquotæ, ſive eosdem metientur.

COROLL. I. Hinc apparet, numeros primos $a$ & $b$ eſſe minimos omnium numerorum, qui cum iisdem in eadem proportione eſſe poſſunt. Si enim numeri $e$ & $f$ primis minores forent iisdem proportionales, tunc, per theorema præſens, $e$ metiretur $a$, & $f$ metiretur $b$, per unam eandemque quantitatem, ſit ea $g$; conſequenter $a$ & $b$ haberent communem menſuram $g$, quod aperte implicat, ſiquidem $a$ & $b$ ſupponebantur primi.

COROLL. II. Si quantitates $c$ & $d$ per tertiam quandam $g$ dividantur, quoti $h$ & $k$ erunt inter ſe ut quantitates diviſæ $c$ & $d$ (per princ. Arithm.); cumque quoti fiant eo minores, quo major eſt tertia illa ſive diviſor (per eadem principia), erunt $h$ & $k$ minimi numeri, qui in eadem proportione cum $c$ & $d$ eſſe poſſunt, ſi $c$ & $d$ diviſæ ſupponantur per maximum communem diviſorem; ſive quod eodem recidit, erunt $h$ & $k$ numeri inter ſe primi. (Cor. præc.)

## THEOREMA IV.

*Si duo numeri* e *&* f *ſint primi tertio* g, *etiam productum eorum erit eidem numerus primus.*

*Dem.*

*Dem.* Habeant enim, si poterunt, $ef$ & $g$ communem mensuram $h$; & metiatur $h$ productum $ef$ per $k$, ita ut $hk=ef$, erit $h:e=f:k$. Quia jam $h$ metitur $g$, & $g$ est numerus primus quantitati $e$ per hypoth., erit $h$ etiam primus eidem $e$ ( Cor. Def. 5. ); consequenter $h$ mensurabit $f$ ( Cor. I. Theor. 3. ). Cum autem porro $h$ metiatur $g$, qui est primus numero $f$, insimul $h$ erit primus numero $f$; quod aperte implicat. Ergo productum erit ei quantitati primum, cui factores sunt primi.

Coroll. I. Si quantitates in theoremate memoratæ $e$ & $f$ sint æquales, erit $e^2=ef$; consequenter quadratum erit numerus primus quantitati $g$, cui radix quadrati est numerus primus.

Coroll. II. Si duo numeri $e$ & $f$ sint primi duobus aliis $g$ & $l$, erunt quantitates $ef$ & $gl$ inter se primæ. Quia enim, per theorema præsens, productum $ef$ est primum numero $g$, atque etiam numero $l$, erit, per eandem rationem, productum $gl$ primum producto $ef$.

Coroll. III. Hinc si $e=f$, & $g=l$, erit quadratum $e^2$ primum quadrato $g^2$; & in genere dignitas quæcunque quantitatis $e$ simili dignitati quantitatis $g$, si ipsæ radices inter se supponantur primæ.

## THEOREMA V.

*Si* c *&* d *sint numeri inter se primi, quantitas minima quam ambo metientur erit* cd; *si vero sint inter se compositi, & eorum maxima communis mensura* y *metiatur* c *per* r, *&* d *per* s, *erit* cs *vel* dr *quan-*

*quantitas minima seorsim mensuranda per quantitates* c *&* d.

*Dem.* Si numeri primi $c$ & $d$ metirentur numerum producto $cd$ minorem, sit is $cm = dn$. Cum igitur productum $cm$ sit minus producto $cd$, & $dn$ minus producto $cd$, per hypothesin, erit $m < d$ & $n < c$. Quia porro $cm = dn$, erit $n : m = c : d$; adeoque numeri primi $c$ & $d$ metientur $n$ & $m$, qui cum iisdem sunt in eadem proportione, (Theor. 3. Cor. 1.) hoc est, major mensurabit minorem, quod est absurdum. Hinc numeri primi $c$ & $d$ non metiri possunt numerum producto eorundem minorem.

Ulterius, si $c$ & $d$ sint numeri compositi, est per hypothesin $c = ry$, & $d = sy$; hinc $c : d = r : s$, & $cs = dr$. Si igitur ambæ quantitates $c$ & $d$ metirentur quantitatem minorem quam $cs$, sit ea $pc = qd$; erit itaque $c : d = r : s = q : p$. Jam quia $r$ & $s$ sunt quoti, orti ex divisione quantitatum $c$ & $d$ per maximum earum divisorem $y$; & consequenter sunt minimi termini, qui cum $c$ & $d$ in eadem proportione esse possunt (Theor. 3. Cor. 2.); hinc $s$ metiretur $p$. Sed quia $cp$ supponitur esse minor quam $cs$, $s$ esset $> p$, adeoque major foret minoris mensura; quod est absonum. Hinc $cs$ vel $dr$ erit quantitas minima, quam numeri compositi $c$ & $d$ separatim metientur.

## SCHOLION.

Quodsi quantitates sint numero plures, productum earundem constanter erit quantitas minima, quam ſingulæ ſeorſim metientur, ſi nempe omnes ſint inter ſe primæ. Si vero quædam illarum communem habeant diviſorem; quantitas quædam, producto omnium minor, erit per ſingulas diviſibilis. Eruitur illa, ſi quantitates omnes, quæ communem diviſorem habent, una tantum excepta, per ipſum dividantur, & quoti loco ipſarum quantitatum in multiplicatione adhibeantur. Quæratur ex. gr. dividuus minimus quantitatum propoſitarum $ac$, $bf$, $abk$, $kl$. Quia $ac$ & $abk$ communi gaudent diviſore $a$, altera illarum per $a$ erit dividenda, & exſurgent $c$, $bf$, $abk$, $kl$; & cum $abk$ & $kl$ etiam deprehendantur habere communem menſuram $k$, alterutra dividi debet per $k$, & emergent quantitates $c$, $bf$, $ab$, $kl$, quarum productum $cbfabkl$ erit quantitas quæſita.

## THEOREMA VI.

*Dignitates quæcunque, quarum radices ſunt numeri mixti, ſunt ipſæ numeri mixti.*

*Dem.* Sit $d + r:s$ numerus mixtus, ubi $d$ deſignet numerum integrum, $r:s$ autem fractionem ad minimos terminos reductam. Quia $r$ & $s$ ſunt inter ſe primi, erunt etiam $ds + r$ & $s$ inter ſe primi, conſequenter eorum dignitates quæcunque ſimiles numeri inter ſe primi (Cor. 3. Theor. 4.), ſive $\overline{ds + r}|^{n} : s^{n}$ nunquam æquabit numerum integrum, ſed ſemper erit numerus mixtus.

Corollarium. Hinc potentiæ cujuſcunq;, quæ eſt numerus integer, radix erit aut numerus integer,

teger, aut quantitas unitati incommensurabilis sive surda. Sit ex. gr. numerus integer X cujus radix quæritur; sitque radix major quam $x$, sed minor quam $x+1$, erit eadem hoc in casu quantitas surda. Si enim quantitatis X radix foret numerus mixtus, tunc hic ipse in se ductus daret quantitatem integram; quod per theorema præsens est impossibile.

## SCHOLION I.

Sic radices quadratæ ex omnibus numeris integris, sunt quantitates surdæ, præterquam ex 1, 4, 9, 16, 25. &c. quorum radices sunt numeri 1, 2, 3, 4, 5. &c. Similiter radices cubicæ ex numeris integris, exceptis 1, 8, 27, 64, 125. &c. sunt quantitates irrationales. Et generaliter, quotiescunque radix quædam ex dignitate data extrahenda erit, ejusmodi dignitas inveniri debet, cujus exponens ductus in exponentem radicis foret æqualis exponenti datæ dignitatis. In quocunque igitur casu talis numerus vel exponens novæ dignitatis inveniri non potest in numeris integris, radix evadet quantitas surda.

## SCHOLION. II.

Quantitates surdæ hoc modo exprimi solent: $\sqrt[n]{a^m b}$, $\sqrt[s]{x^r y^n}$, $\sqrt{cd}$, $\sqrt[3]{18}$; ut & sequenti: omittendo scilicet signum radicale, & apponendo quantitati, ex qua radix est extrahenda, exponentem fractum, cujus fractionis numerator exponens quan-

 titatis

titatis propositæ erit, denominator autem exponens radicis quæsitæ. Sic $a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{3}{m}}$ significat radicem $m$ ex $ab^3$, & $y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}$ radicem cubicam ex $y^2x^5$. Cujus rei ratio ex iis, quæ pro quantitate ad dignitates quascunque evehenda præcipiunt Mathematici, patescit. Potentiam videlicet dicunt radicis inveniri, multiplicando ejus exponentem per exponentem potentiæ desideratæ; consequenter radix potentiæ datæ habebitur, diviso potentiæ exponente per numerum, qui indicat quænam species radicis desideretur.

## SCHOLION IV.

Non omnes quantitates, quæ cum numeris, quorum radices sunt quantitates surdæ, sunt in eadem proportione, habebunt radices incommensurabiles: quod nonneminem Mathematicorum contendere novimus. Unico exemplo contrarium probasse sufficiat: Sic $3 : 12 = 4 : 16$; heic licet radices quadratæ ex 3 & 12 sint quantitates surdæ, ex 4 tamen & 16 non item.

## PROBLEMA I.

*Quantitates irrationales ad dignitates quascunque evehere, aut ex iisdem radices desideratas extrahere.*

Eadem via & methodo quantitatum irrationalium potentiæ vel radices eruuntur, qua rationalium dignitates vel radices inveniuntur. Sic surda ad dignitatem desideratam evehitur, multiplicando surdæ exponentem fractum per exponentem potentiæ quæsitæ. Con-

Contra radix quæcunque ex ſurda extrahitur, dividendo ſurdæ exponentem fractum per indicem radicis deſideratæ.

Ex. gr. Quadratum ex $\sqrt{a^4b^6} = a^4b^6$; ex $\sqrt{}^5 : \overline{a+b+c} = \sqrt{}^5 : \overline{a+b+c}|^2$; Quadratum ex $\sqrt{}^4 : b^3 = b^{\overline{3:4}\cdot 2} = b^{6:4} = \sqrt{b^3}$.

Cubus ex $\sqrt{a} = a^{\overline{1:2}\cdot 3} = a^{3:2} = \sqrt{a^3}$; Biquadratum ex $\sqrt{b} = b^{\overline{1:2}\cdot 4} = b^2$. Porro radix quadrata ex $\sqrt{}^3 : d^2 = d^{\overline{2:3}:2} = d^{2:6} = d^{1:3} = \sqrt{}^3 : d$; Radix cubica ex $\sqrt{ab} = a^{\overline{1:2}:3}\, b^{\overline{1:2}:3} = a^{1:6}\, b^{1:6} = \sqrt{}^6 : ab$; Radix biquadratica ex $\sqrt{}^3 : e^2 = e^{\overline{2:3}:4} = e^{1:6} = \sqrt{}^6 : e$.

Coroll. I. Cum quadratum ex $\sqrt{a^4b^6} = a^4b^5$, & biquadratum ex $\sqrt{b} = b^2$; patet potentias ſurdarum evadere rationales, quoties exponens potentiæ ad quam evehuntur, ſit vel æqualis denominatori ſurdæ datæ, vel denominatoris multiplus.

Coroll. II. Cum cubus ex $\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$; manifeſtum eſt ſurdam ad dignitatem quamcunque evehi, multiplicato exponente quantitatis ſub ſigno per exponentem dignitatis quæſitæ, ſervato eodem ſigno radicali.

Coroll. III. Cum quadratum ex $\sqrt{}^4 : b^3 = \sqrt{b^3}$; evidens eſt quantitatem irrationalem ad dignitatem quoque evehi, diviſo denominatore ejus per exponentem potentiæ deſideratæ, invariata manente quantitate ſub ſigno radicali.

Coroll. IV. Siquidem radix quadrata ex $\sqrt{3}:d^2 = \sqrt{3}:d$, & radix cubica ex $\sqrt{ab} = \sqrt{6}:ab$; patet radicem desideratam obtineri, interdum eandem extrahendo ex quantitate sub signo, signo radicali manente eodem ac antea; interdum denominatorem surdæ multiplicando per indicem radicis quæsitæ, invariata manente quantitate sub signo.

Coroll. V. Denique, quoniam radix biquadratica ex $\sqrt{3}:e^2 = \sqrt{6}:e$; elucet quoque casus dari, in quibus dignitas quantitatis sub signo erit deprimenda, & denominator signi radicalis insimul erit augendus, antequam radix desiderata obtineatur.

## PROBLEMA II.

*Surdas diversæ denominationis reducere ad eandem.*

Quoniam de reductione omnium simplicissima semper solliciti esse debemus, ideo invenienda est (per Theor. 5. ejusque Scholion) quantitas omnium minima, per singulos indices signorum radicalium datorum divisibilis, quæ erit communis denominator quæsitus; hic detectus index per indicem cujuslibet radicalis datæ dividatur, & quantitas sub signo elevetur ad dignitatem, cujus index sit dictus quotus. Sic $\sqrt{cd}$, $\sqrt{3}:c^2d$, $\sqrt{6}:c^5d^3$ ad has reducuntur $\sqrt{6}:c^3d^3$, $\sqrt{6}:c^4d^2$, $\sqrt{6}:c^5d^3$.

Dignitas $ms$ ex $\sqrt[ms]{x^{ns}}$ est $= x^{ns}$, & eadem dignitas ex $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ est $x^{\frac{msn}{m}} = x^{ns}$. Cum igitur poten-

potentiæ similes quantitatum $\sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $\sqrt[m]{x^{n}}$ sint inter se æquales, ipsæ quantitates erunt æquales. Idem inferatur de quantitatibus $\sqrt[ms]{y^{rm}}$ & $\sqrt[s]{y^{r}}$; adeoque $\sqrt[m]{x^{n}}$ & $\sqrt[s]{y^{r}}$ reductæ sunt ad alias $\sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $\sqrt[ms]{y^{mr}}$ ejusdem valoris cum prioribus, & communem denominatorem habentes.

Aliter: Quoniam quantitates surdæ sunt dignitates, quarum exponentes sunt fractiones, ubi numerator denotat exponentem quantitatis sub signo, denominator autem exponentem ipsius signi radicalis; surdæ reducuntur ad eandem denominationem, hisce fractionibus ad alias ejusdem valoris & eundem denominatorem habentes reductis. Sic ex. gr. $a^{1:2}$, $b^{2:3}$, $c^{5:6} = a^{3:6}$, $b^{4:6}$, $c^{5:6} = \sqrt{}^{6}\!:a^{3}$, $\sqrt{}^{6}\!:b^{4}$, $\sqrt{}^{6}\!:c^{5}$.

## SCHOLION.

Siquidem surdæ sunt dignitates cum exponentibus fractis, ad simpliciores expressiones, non mutato valore, detrudi possunt, quoties numerator & denominator exponentis communem habuerint mensuram. Talis detrusio ad simpliciores formas est necessaria ante reductionem surdarum ad eandem denominationem, ne videlicet communis index signorum radicalium detegendus nimium crescat. Ex. gr. surdarum $\sqrt{a}$, $\sqrt{}^{3}\!:b^{2}c$, $\sqrt{}^{4}\!:c^{2}$, sine prævia reductione, communis denominator foret $\sqrt{}^{12}$; sed cum $\sqrt{}^{4}\!:c^{2} = \sqrt{c}$, communis denominator fiet $\sqrt{}^{6}$.

THEO-

## THEOREMA VII.

*Reductis radicalibus ad eandem denominationem, in multiplicatione & divisione earundem servatur signum radicale, & quantitates sub signis multiplicantur vel dividuntur.*

*Dem.* Sit $\sqrt[m]{a} = c$, & $\sqrt[m]{b} = d$, erit $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} = cd$; adeoque $ab = c^m d^m$; & denique $\sqrt[m]{ab} = cd$.

Porro, quoniam divisione solvitur, quod per multiplicationem fuit compositum, patet $cd : c = d$, sive $\sqrt[m]{ab} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

## SCHOLION.

Si quantitates dentur rationales ante signa radicalia, hæ separatim in se invicem ducantur, vel una per alteram dividatur. Sic $2a\sqrt{2cy} \times 3b\sqrt{5ax} = 6ab\sqrt{10acxy}$; $5\sqrt{2} \times 9\sqrt[3]{10} = 5\sqrt[6]{2^3} \times 9\sqrt[6]{10^2} = 45\sqrt[6]{2^3 . 10^2} = 45\sqrt[6]{800}$; $\frac{6cd^2}{\sqrt{12cd^3}} \times \frac{4c\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{8c^4 + 8c^3d^2}} = \frac{\sqrt{36c^2d^4}}{\sqrt{12cd^3}} \times \frac{\sqrt{16c^4 + 16c^2d^2}}{\sqrt{8c^4 + 8c^2d^2}} = \sqrt{3cd} \times \sqrt{2} = \sqrt{6cd}$; similiter $\sqrt{cd} : \sqrt[3]{c^2d} = \sqrt[6]{c^3d^3} : \sqrt[6]{c^4d^2} = \sqrt[6]{d:c}$; denique $72cde\sqrt{\frac{108fg}{3cd}} : 8cd\sqrt{\frac{6g}{3c}} = 9e\sqrt{\frac{18f}{d}}$.

COROLLARIUM. Patet igitur, si surdæ habeant easdem quantitates sub signis, in multiplicatione earum fractos exponentes fore sibi invicem addendos;

dos; in divisione autem alterum ab altero subtrahendum. Sic $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$; $\overline{a^2 + x^2}|^{\frac{1}{3}} \times \overline{a^2 + x^2}|^{\frac{1}{4}} = \overline{a^2 + x^2}|^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \overline{a^2 + x^2}|^{\frac{7}{12}}$; $\overline{\frac{5cx}{3d}}|^{\frac{1}{2}} : \overline{\frac{5cx}{3d}}|^{\frac{1}{4}} = \overline{\frac{5cx}{3d}}|^{\frac{1}{4}}$; $\mathrm{V}\overline{a + x} : \mathrm{V}^3 : \overline{a + x} = \overline{a + x}|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \overline{a + x}|^{\frac{1}{6}} = \mathrm{V}^6 : \overline{a + x}$.

## SCHOLION.

Quod quantitates surdæ, licet ipsæ sint unitati incommensurabiles, ad ejusmodi tamen dignitates evectæ, quarum exponentes vel sunt iidem cum exponentibus radicum, vel horum multipli, fiant unitati commensurabiles sive rationales, (Cor. 1. Probl. 1.) vidimus. Hoc insuper loco non incongruum erit observare, surdas simplices sæpissime inter se esse commensurabiles. Tales sunt surdæ communicantes, de quibus inferius (Schol. 2. Theor. 8.). Inter has ratio semper obtinet rationalis, & pars irrationalis, quam communem habent, est earundem communis mensura. Et in genere, omnes surdæ sunt inter se commensurabiles, quarum quantitates sub signis radicalibus sunt inter se compositæ; licet inter non communicantes non nisi ratio intercedat irrationalis. Et maximus earum communis divisor in ejusmodi casibus est facilis inventu. Indagatur videlicet quinam sit maximus communis divisor quantitatum sub signis radicalibus, eique idem præfigitur ſignum radicale, quod ipſæ ſurdæ habent, quarum communis menſura quæritur; quæ nova quantitas erit ſurdarum propoſitarum maxima communis menſura. Per hanc ſi ipſæ ſurdæ dividantur, ratio earum reducetur ad expreſſionem omnium ſimpliciſſimam: Sic $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{30}-\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, diviſione videlicet facta per maximum communem diviſorem $\sqrt{6}$.

## THEOREMA VIII.

*Radix producti eſt æqualis facto ex radicibus factorum.*

*Dem.* Sit productum $x^m y^m$, factores erunt $x^m$ & $y^m$, eorum radices $m$ ſunt $x$ & $y$, factum radicum $xy$, quod eſt $=\sqrt[m]{x^m y^m}$.

## SCHOLION. I.

Per præſens adeo theorema perſpicitur, quomodo ex vinculo irrationalitatis liberetur, quidquid rationale ſub eodem contineatur. Sit e. g. reducenda radix cubica ex producto $a^3x$, factores ſunt $a^3$ & $x$, horumque radices cubicæ $a$ & $\sqrt{^3:x}$, radicum productum $a\sqrt{^3:x}$, quod eſt $=\sqrt{^3:a^3x}$; $\sqrt{^3:a^3b^4c^2}=\sqrt{^3:a^3b^3}\times\sqrt{^3:bc^2}=ab\sqrt{^3:bc^2}$; Similiter

$$\sqrt[4]{\frac{16a^5b^7+16a^6b^6}{81c^4d^2-162c^5b}}=\sqrt[4]{\frac{16a^4b^4}{81c^4}}\times\sqrt[4]{\frac{ab^3+a^2b^2}{d^2-2cb}}=$$

$\frac{2ab}{3c}\times\sqrt[4]{\frac{ab^3+a^2b^2}{d^2-2cb}}$; Deniq; $\sqrt{18c^3d\times\overline{c+2y}]^2+27cdf\times\overline{c+2y}]^3}=\sqrt{9\times\overline{c+2y}|^2}\times\sqrt{2c^3d+3cdf\times\overline{c+2y}}$ $=\overline{3c+6y}\times\sqrt{2c^3d+3c^2df+6cdfy}$.

COR-

Corollarium. Quotiescunque igitur ſignum radicale ejusmodi numero vel quantitati præfixum eſt, quæ productum ſit ex diverſis factoribus, atque ex uno vel altero eorum radix, quam denominator ſigni radicalis indicat, extrahi poteſt, mox revera extrahatur, ipſaque radix factoris ponatur ante ſignum radicale, in ea combinatione cum eodem, quam habuit cum ceteris factoribus ſub ſigno, antequam ad ſimpliciorem formam reducebatur radicalis. Ceterum in quocunque caſu productum ſub ſigno radicali exacte dividi non poteſt per quantitatem, quæ eſt talis dignitas, qualem denominator ſigni radicalis indicat, in eo nec quantitas ſurda ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poteſt.

## SCHOLION II.

Si radicales ejusdem denominationis, poſtquam reductæ ſunt ad ſimpliciſſimas expreſſiones, eandem habeant partem irrationalem, dicuntur *Communicantes*. Hæ adduntur, vel una ex altera ſubtrahitur, in priori caſu ſummam, in poſteriori autem differentiam coëfficientium rationalium præfigendo communi parti irrationali. Ex. gr. $\sqrt{8a^2} + \sqrt{50a^2} - \sqrt{72a^2} = a\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{12c^2d}{5}} + \sqrt{\frac{15c^2d}{4}} = 4c\sqrt{\frac{3d}{20}} + 5c\sqrt{\frac{3d}{20}} = 9c\sqrt{\frac{3d}{20}}$; $3c\sqrt{4c^2d^2 + 8d^4} + 3d\sqrt{9c^4 + 18c^2d^2} = 6cd\sqrt{c^2 + 2d^2} + 9cd\sqrt{c^2 + 2d^2} = 15cd\sqrt{c^2 + 2d^2}$. Si vero ſurdæ non fuerint communicantes, adduntur eædem combinando easdem



per

per propria ſigna; & una ab altera ſubtrahitur, ſubtrahendam cum mutato ſigno minuendæ annectendo.

## SCHOLION. III.

Regulæ etiam tradi ſolent, quibus dignoſci poteſt, utrum quantitates irrationales, ad eandem denominationem reductæ, ſint communicantes, nec ne. Ita ſi radicales propoſitæ ſint quadraticæ, multiplicetur quantitas quæ eſt ſub ſigno radicali unius, per quantitatem quæ eſt ſub ſigno alterius; atque ex hoc producto radix quadrata exacte extrahi poterit, ſi radicales erunt communicantes. Ex. gr. $\sqrt{18}$, $\sqrt{8}$, ibi factum ex quantitatibus ſub ſignis eſt $144$; tentandum igitur utrum ex hoc producto radix quadrata extrahi exacte poſſit; & cum res ſuccedat, ita ut $\sqrt{144}=12$; hinc concludimus radicales propoſitas eſſe communicantes. Porro, ſi radicales ſint cubicæ, quantitas ſub alterutro ſignorum radicalium evehatur ad dignitatem ſecundam, & dein multiplicetur per quantitatem ſub altero; ex quo producto radix cubica extrahi poteſt, quando radicales ſunt communicantes. Ex. gr. $\sqrt{^3}:24$, $\sqrt{^3}:81$; quadrato ex 24. ducto in 81. exſurgit productum 46656, cumque hujus radix cubica ſit $=36$, radicales propoſitæ erunt communicantes. Et in genere, ſi denominator radicalium propoſitarum ſit $m$, quantitas ſub uno ſigno radicali evehenda eſt ad dignitatem $m-1$, & dein multiplicanda per quantitatem ſub altero ſigno; ſique ex hoc producto radix $m$ extrahi poſſit, ſurdæ erunt communicantes.

SCHO-

## SCHOLION. IV.

Surdis ſimplicibus in ſuperioribus leviter diſcuſſis, inſtituti exigit ratio, ut de compoſitis paucis agamus. In anteceſſum vero obſervamus, quod plurimæ cum ſurdis compoſitis operationes inſtituendæ, ſecundum præcepta quæ de ſimplicibus tradita ſunt, ſolvi atque perfici poſſint & debeant; quæ idcirco heic loci in conſiderationem non venient. Ex adverſo nonnulla compoſitis propria & peculiaria explanare conabimur. Ita in antecedentibus annotavimus ſurdas ſimplices in potentiis eſſe commenſurabiles unitati, ita ut ad certas potentias evectæ facta relinquant rationalia (Cor. 1. Probl. 1.). Aliter cum ſurdis compoſitis eſſe comparatum, experientia quivis facile convincetur. Hæ enim, ad potentias quascunque evectæ, irrationales quantitates communiter adhuc involvunt. Hoc licet ita ſit, interim tamen quævis ſurda compoſita aliam ſurdam compoſitam ſibi quaſi correſpondentem conſtanter habet, per quam ſi multiplicetur, factum prodeat rationale. Operæ igitur pretium erit, noſſe vias & methodos in caſu quocunque particulari indagandi illam quantitatem irrationalem compoſitam, ex cujus multiplicatione cum ſurda compoſita data quantitas oriatur rationalis. Continetur talis methodus in ſequentibus theorematis.

## THEOREMA IX.

Si multiplicetur $x^r - y^r$ per $x^{s-r} + x^{s-2r}y^r + x^{s-3r}y^{2r} + x^{s-4r}y^{3r} +$ &c. factum erit $x^s - y^s$.



*Dem.*

*Dem.* $x^{s-r} + x^{s-2r}y^{r} + x^{s-3r}y^{2r} + x^{s-4r}y^{3r} + \&c.\ y^{s-r}.$
$\times\, x^{r} - y^{r}$

$$\begin{array}{l} x^{s} + x^{s-r}y^{r} + x^{s-2r}y^{2r} + x^{s-3r}y^{3r} + \&c. \\ \quad - x^{s-r}y^{r} - x^{s-2r}y^{2r} - x^{s-3r}y^{3r} - \&c. - y^{s}. \end{array}$$

$= x^{s} - y^{s}.$

## SCHOLION.

Heic loci $x$ & $y$ deſignant quantitates ſub ſignis radicalibus; $r$ ſupponitur eſſe index fractus ſurdarum; $s$ autem minimus integer numerus quem $r$ exacte dividit. His indicatis, ſit jam propoſita ſurda binomia $\sqrt{5}:x^{2} - \sqrt{5}:y^{2}$; invenienda eſt alia compoſita ſurda talis, ut factum evadat rationale, ſi propoſita per eam multiplicetur. In hoc caſu $r = \frac{2}{5}$ & $s = 2$; adeoque $x^{s-r} + x^{s-2r}y^{r} + x^{s-3r}y^{2r} + x^{s-4r}y^{3r} + x^{s-5r}y^{4r} + \&c. =$
$x^{\frac{8}{5}} + x^{\frac{6}{5}}.y^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{4}{5}}.y^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{2}{5}}.y^{\frac{6}{5}} + y^{\frac{8}{5}} = \sqrt{5}:x^{8} + \sqrt{5}:x^{6}y^{2} + \sqrt{5}:x^{4}y^{4} + \sqrt{5}:x^{2}y^{6} + \sqrt{5}:y^{8}$. In hanc ducatur propoſita ſurda $\sqrt{5}:x^{2} - \sqrt{5}:y^{2}$, eritque factum $(\sqrt{5}:x^{8} + \sqrt{5}:x^{6}y^{2} + \sqrt{5}:x^{4}y^{4} + \sqrt{5}:x^{2}y^{6} + \sqrt{5}:y^{8})$ $(\sqrt{5}:x^{2} - \sqrt{5}:y^{2}) = x^{2} - y^{2}$.

Inveniatur etiam ſurda compoſita ex cujus multiplicatione cum propoſita $\sqrt{3}:a^{2}b^{3} - \sqrt{3}:c^{2}d^{4}$ factum prodeat rationale. Siquidem $r = \frac{1}{3}$ & $s = 1$, erit detecta compoſita $= \overline{a^{2}b^{3}}|^{1-\frac{1}{3}} + \overline{a^{2}b^{3}}|^{1-\frac{2}{3}} \times \overline{c^{2}d^{4}}|^{\frac{1}{3}} + \overline{a^{2}b^{3}}|^{0} \times \overline{c^{2}d^{4}}|^{\frac{2}{3}} = \overline{a^{2}b^{3}}|^{\frac{2}{3}} + \overline{a^{2}b^{3}c^{2}d^{4}}|^{\frac{1}{3}} +$

$c^{2}d$

$$\overline{c^2d^4}|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2b^3)^2} + \sqrt[3]{a^2b^3c^2d^4} + \sqrt[3]{(c^2d^4)^2} =$$
$$\sqrt[3]{a^4b^6} + \sqrt[3]{a^2b^3c^2d^4} + \sqrt[3]{c^4d^8}.$$ Hinc
$$\left(\sqrt[3]{a^4b^6} + \sqrt[3]{a^2b^3c^2d^4} + \sqrt[3]{c^4d^8}\right)\left(\sqrt[3]{a^2b^3} - \sqrt[3]{c^2d^4}\right) = \sqrt[3]{a^6b^9} - \sqrt[3]{c^6d^{12}} = a^2b^3 - c^2d^4.$$

## THEOREMA X.

Si multiplicetur $x^r + y^r$ per $x^{s-r} - x^{s-2r}y^r + x^{s-3r}y^{2r} - x^{s-4r}y^{3r} + x^{s-5r}y^{4r} -$ &c.
Factum erit $x^s \pm y^s$.

Demonstratio coincidit cum demonstratione Theorematis præcedentis.

## SCHOLION.

Iisdem positis ac in theoremate 9; quæratur surda composita, quæ in datam $\sqrt[4]{a+b^3} + \sqrt[4]{c}$ ducta productum generet rationale. In hoc casu $r = \frac{1}{4}$, $s = 1$; erit itaque detecta composita $=$

$$\overline{a+b^3}|^{1-\frac{1}{4}} - \overline{a+b^3}|^{1-\frac{2}{4}} \times c^{\frac{1}{4}} + \overline{a+b^3}|^{1-\frac{3}{4}} \times c^{\frac{2}{4}} - \overline{a+b^3}|^{0} \times c^{\frac{3}{4}} = \overline{a+b^3}|^{\frac{3}{4}} - \overline{a+b^3}|^{\frac{2}{4}} \times c^{\frac{1}{4}} + \overline{a+b^3}|^{\frac{1}{4}} \times c^{\frac{2}{4}} - c^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(a+b^3)^3} - \sqrt[4]{(a+b^3)^2} \times \sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a+b^3} \times \sqrt[4]{c^2} - \sqrt[4]{c^3} = \sqrt[4]{a^3+3a^2b^3+3ab^6+b^9} - \sqrt[4]{a^2c+2ab^3c+b^6c} + \sqrt[4]{ac^2+b^3c^2} - \sqrt[4]{c^3}.$$

Hæc inventa in datam ducatur & erit
$$\left(\sqrt[4]{a^3+3a^2b^3+3ab^6+b^9} - \sqrt[4]{a^2c+2ab^3c+b^6c} + \sqrt[4]{ac^2+b^3c^2} - \sqrt[4]{c^3}\right)\left(\sqrt[4]{a+b^3} + \sqrt[4]{c}\right) =$$

$\sqrt[4]{a^4}$

$\sqrt{4:a^4+4a^3b^3+6a^2b^6+4ab^9+b^{12}} - \sqrt{4:c^4} = a+b^3-c.$

Exemplum etiam numericum addere lubet. Sit videlicet data $\sqrt{5:2^3}+\sqrt{5:3^3}$; & detegatur alia composita talis, ut ex harum multiplicatione oriatur quantitas rationalis. Quoniam $r=\frac{3}{5}$ & $s=3$, erit

detecta composita $=2^{\frac{12}{5}}-2^{\frac{9}{5}}.3^{\frac{3}{5}}+2^{\frac{6}{5}}.3^{\frac{6}{5}}-2^{\frac{3}{5}}.3^{\frac{9}{5}}+3^{\frac{12}{5}}$. Hinc $(\sqrt{5:2^{12}}-\sqrt{5:2^9.3^3}+\sqrt{5:2^6.3^6}-\sqrt{5:2^3.3^9}+\sqrt{5:3^{12}})$ $(\sqrt{5:2^3}+\sqrt{5:3^3}) = \sqrt{5:2^{15}}+\sqrt{5:3^{15}}=2^3+3^3=35.$

## THEOREMA XI.

Si multiplicetur $x^r-y^p$ per $x^{s-r}+x^{s-2r}y^p+x^{s-3r}y^{2p}+x^{s-4r}y^{3p}+x^{s-5r}y^{4p}+$ &c. productum erit $x^s-y^{\frac{sp}{r}}$.

Dem. $x^{s-r}+x^{s-2r}y^p+x^{s-3r}y^{2p}+x^{s-4r}y^{3p}+$ &c. $x^0y^{\frac{sp}{r}-p}$
$\times x^r-y^p=$

$$\left(\begin{array}{l} x^s+x^{s-r}y^p+x^{s-2r}y^{2p}+x^{s-3r}y^{3p}+\text{&c.} \\ \quad -x^{s-r}y^p-x^{s-2r}y^{2p}-x^{s-3r}y^{3p}-\text{&c.}-y^{\frac{sp}{r}} \end{array}\right)$$

$=x^s-y^{\frac{sp}{r}}$.

## SCHOLION.

Notandum $r$ jam denotare exponentem fractum unius, $p$ autem alterius partium surdæ binomiæ datæ, $s$ denique minimum integrum numerum, quem $r$ & $r:p$ seorsim exacte possunt dividere.

Quem

Quibus obſervatis, quæratur jam compoſita quædam ſurda, ex cujus multiplicatione cum propoſita $\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}$ factum exſurgat rationale. In hoc caſu $r=\frac{1}{2}$, $p=\frac{2}{3}$; hinc $r:p=\frac{3}{4}$, & $s=3$; adeoque $x^{s-r}+x^{s-2r}y^{p}+x^{s-3r}y^{2p}+x^{s-4r}y^{3p}+x^{s-5r}y^{4p}+x^{s-6r}y^{5p}$ &c. $=$ $a^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{6}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{8}{3}}+b^{\frac{10}{3}}$ Hinc $(\sqrt{a^5}+\sqrt{a^4}\sqrt[3]{b^2}+\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^4}+\sqrt{a^2}\sqrt[3]{b^6}+\sqrt{a}\sqrt[3]{b^8}+\sqrt[3]{b^{10}})$ $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2})=a^3-b^4$.

## THEOREMA XII.

Si multiplicetur ſurda binomia $x^{r}+y^{p}$ per $x^{s-r}-x^{s-2r}y^{p}+x^{s-3r}y^{2p}-x^{s-4r}y^{3p}+x^{s-5r}y^{4p}-$ &c. factum erit $x^{s}\pm y^{\frac{sp}{r}}$.

Demonſtratio eſt eadem cum præcedenti.

## SCHOLION.

Iisdem poſitis quæ in theoremate 11, inveniatur ſurda compoſita, quæ in datam $\sqrt{5x}+\sqrt[3]{2y}$ ducta quantitatem gignat rationalem. Heic $r=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{3}$; hinc $r:p=\frac{3}{2}$, & $s=3$, adeoque detecta compoſita $=5^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}-5^{\frac{4}{2}}x^{\frac{4}{2}}.2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}}.2^{\frac{3}{3}}y^{\frac{3}{3}}$ $+5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{5}{3}}y^{\frac{5}{3}}=$ $\sqrt{5^5x^5}-\sqrt{5^4x^4}\sqrt[3]{2y}+\sqrt{5^3x^3}\sqrt[3]{2^2y^2}-\sqrt{5^2x^2}\sqrt[3]{2^3y^3}$ $+\sqrt{5x}\sqrt[3]{2^4y^4}-\sqrt[3]{2^5y^5}$. Quæ, multiplicata per $\sqrt{5x}+\sqrt[3]{2y}$, dabit $5^3x^3-2^2y^2=125x^3-4y^2$.

Coroll. I. Licet numerus terminorum, in uno factore quatuor proxime præcedentium theorematum, ſit indeterminatus, in caſibus tamen quibusvis ſpecialibus idem determinatus evadit, & æqualis quantitati $s$ diviſæ per $r$.

Coroll. II. Facta rationalia quæ per theoremata 10. & 12. obtinentur, erunt $x^s - y^s$, & $x^s - y^{\frac{sp}{r}}$, quoties quotus $s:r$ eſt numerus par; alias eadem facta erunt $x^s + y^s$, & $x^s + y^{\frac{sp}{r}}$.

## SCHOLION.

Poſtquam jam theoremata exhibuimus, per quæ ſurdam compoſitam invenire licet, ex cujus multiplicatione cum data quacunque ſurda binomia factum proveniat rationale; convenit, ut, vel unico ſpecimine, utilitatem inde emanantem declaremus. In quem finem ſequens communicamus

## PROBLEMA III.

*Quantitatem quamcunque per ſurdam binomiam dividere.*

Reſolutio. 1.) Inveniatur ſurda ejusmodi compoſita, quæ in diviſorem ducta factum producat rationale.

2.) Per illam ſurdam compoſitam actu multiplicetur & dividendus & diviſor.

3.) Per hoc modo emergentem diviſorem rationalem, novus ille dividendus dividatur, & detectus quotus erit (per princ. Arithm.) æqualis quan-

quantitati propositæ, divisæ per surdam binomiam. Exempli gratia, dividatur quantitas 5 per $\sqrt{7}-\sqrt{2}$; erit

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{5}$$

$$=\sqrt{7}+\sqrt{2};\quad \frac{\sqrt{27}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{27}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{162}+\sqrt{36}+\sqrt{81}+\sqrt{18}}{3}=\frac{15+12\sqrt{2}}{3}=$$

$$5+4\sqrt{2};\quad \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{160}+\sqrt[3]{80}+\sqrt[3]{40}}{2}=\frac{2\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{10}+2\sqrt[3]{5}}{2}=$$

$$\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}.$$

## SCHOLION.

Radices quascunque ex quantitatibus surdis, tam simplicibus quam compositis, per approximationem posse obtineri in numeris rationalibus, qui particulis contemnendis a veris radicibus deficiunt, supponimus notum. In antecedentibus est etiam ostensum, quomodo ex surdis simplicibus quibuscunque radices extrahi, atque per alias surdas simplices exprimi, possint. Methodum igitur jam erimus tradituri, ex surda composita data, cujus membra ad dignitatem secundam evecta sunt unitati commensurabilia, extrahendi radicem; ubi apparebit, extractionem radicum per approximationem conducere ad has ipsas surdarum radices detegendas.

## PROBLEMA IV.

*Ex surda composita, partium dignitate secunda commensurabilium unitati, radicem extrahere.*

Resolutio. 1.) Sit quantitas ex qua radix est extrahenda $= A \pm \sqrt{B}$; index radicis extrahendæ $= n$; & radix ipsa $= x \pm \sqrt{y}$. Hinc

2.) Erit $\overline{x \pm \sqrt{y}}^{\,n} = A \pm \sqrt{B}$; ubi $A$ denotet summam terminorum imparium, $\sqrt{B}$ autem summam terminorum parium radicis $x \pm \sqrt{y}$, evectæ ad dignitatem, cujus exponens est $n$, hoc est, $x^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} y + \&c. = A$, & $\pm \frac{n}{1} \cdot x^{n-1} \sqrt{y} \pm \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} y \sqrt{y} \pm \&c. = \pm\sqrt{B}$.

3.) Capiatur summa nec non differentia harum æquationum, & radix $n$ utrobique extrahatur, unde $x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{A + \sqrt{B}}$, & $x - \sqrt{y} = \pm\sqrt[n]{A - \sqrt{B}}$.

4.) Addantur æquationes num. 3, & $2x = \sqrt[n]{A + \sqrt{B}} \pm \sqrt[n]{A - \sqrt{B}}$, hinc $x = \frac{\sqrt[n]{A + \sqrt{B}} \pm \sqrt[n]{A - \sqrt{B}}}{2}$

$$= \frac{\sqrt[n]{A + \sqrt{B}}}{2} \pm \frac{\sqrt[n]{A^2 - B}}{2 \times \sqrt[n]{A + \sqrt{B}}}.$$

5.) Ducantur porro in se invicem æquationes num. 3, & $x^2 - y = \pm\sqrt[n]{A^2 - B}$, unde $y = x^2 \mp \sqrt[n]{A^2 - B}$.

*Exemplum* 1. Extrahatur radix quadrata ex $7 + 4\sqrt{3}$. Cum heic loci $n = 2$, $A^2 = 49$, & $B = 48$, erit

erit $x = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2} \pm \frac{\sqrt{49-48}}{2\sqrt{7+\sqrt{48}}} = \frac{3,732 \pm 0,268}{2}$ $= 2$. Cum porro $y = x^2 \mp \sqrt{n:A^2-B}$; erit $y$ in præsenti casu $= 4 \mp 1 = 3$; consequenter radix desiderata $x + \sqrt{y} = 2 + \sqrt{3}$.

*Exemplum.* 2. Extrahatur radix quadrata ex $24 - 8\sqrt{5}$. Cum $n = 2$, $A^2 = 576$, & $B = 320$, erit $x = \frac{\sqrt{24-8\sqrt{5}}}{2} \pm \frac{16}{2\sqrt{24-8\sqrt{5}}} = \frac{2,472 \pm 6,472}{2}$ $= -2$, & $y = 4 \mp 16 = 20$; ergo $x \pm \sqrt{y} = 2\sqrt{5} - 2$.

*Exempl.* 3. Extrahatur radix quadrata ex $5 + \sqrt{24}$. Quoniam $n = 2$, $A^2 = 25$, & $B = 24$, erit $x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{24}}}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5+\sqrt{24}}} = \frac{3,1461 \pm 0,3179}{2}$ $= 1,732 = \sqrt{3}$, & $y = 3 - 1$; consequenter radix desiderata $x + \sqrt{y} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

*Exempl.* 4. Extrahatur radix quadrata ex $27 + 7\sqrt{5}$. Cum $n = 2$, $A^2 = 729$, & $B = 245$, erit $x = \frac{\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{2} \pm \frac{22}{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}} = \frac{6,531 \pm 3,369}{2}$ $= 4,950 = \frac{7}{\sqrt{2}}$, & $y = \frac{49}{2} - \frac{44}{2} = \frac{5}{2}$; adeoque $x + \sqrt{y} = \frac{7+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

*Exempl.* 5. Extrahatur radix quadrata ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$. Cum $n=2$, $A^2=32$, $B=24$, erit

$$x=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{2}\pm\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}=\frac{0,8706\pm3,3483}{2}=2,0594=\sqrt[4]{18},$$

& $y=\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{2}$, consequenter $x-\sqrt{y}=\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

*Exempl.* 6. Extrahatur radix quadrata ex $6+\sqrt{24}$. Cum $n=2$, $A^2=36$, $B=24$, erit $x=$

$$\frac{\sqrt{6+\sqrt{24}}}{2}\pm\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6+\sqrt{24}}}=\frac{3,301\pm1,049}{2}=2,175$$

$=\sqrt{3+\sqrt{3}}$, & $y=3+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$, adeoque $x+\sqrt{y}=\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Si operationem continuaremus, visuri annon valor τȣ $x$ modo detectus simplicius possit exprimi, deprehenderemus eundem $=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}}$.

*Exempl.* 7. Extrahatur radix quadrata ex $6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$. Cum $n=2$, $A^2=44+24\sqrt{2}$, $B=36+24\sqrt{2}$, erit $x=$

$$\frac{\sqrt{6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}}{2}\pm\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}}$$

$$=\frac{0,682\pm4,146}{2}=2,414=1+\sqrt{2},\quad y=$$

$3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3$, adeoque $x-\sqrt{y}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

*Exempl.* 8.

*Exempl.* 8. Extrahatur radix cubica ex $45+29\sqrt{2}$. Cum $n=3$, $A^2=2025$, $B=1682$, erit

$$x=\frac{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}{2}\pm\frac{\sqrt[3]{2025-1682}}{2\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}=$$

$$\frac{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}{2}\pm\frac{7}{2\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}=\frac{4,414\pm1,586}{2}$$

$=3$, & $y=9-7$, adeoque $x+\sqrt{y}=3+\sqrt{2}$.

*Exempl.* 9. Extrahatur radix cubica ex $\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{37}{8}$. Cum $n=3$, $A^2=\frac{675}{16}$, $B=\frac{1369}{64}$, erit

$$x=\frac{\sqrt[3]{\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{37}{8}}}{2}\pm\frac{\frac{11}{4}}{2\sqrt[3]{\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{37}{8}}}=$$

$\frac{2,232\pm1,232}{2}=\frac{1}{2}$, & $y=\frac{1}{4}+\frac{11}{4}$; adeoque $x+\sqrt{}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

*Exempl.* 10. Extrahatur radix cubica ex $54\sqrt{3}+41\sqrt{5}$. Cum $n=3$, $A^2=8748$, $B=8405$, erit $x=$

$$\frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{2}\pm\frac{7}{2\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}=$$

$\frac{5,700\pm1,228}{2}=2,236=\sqrt{5}$; consequenter $y=5+7$, & $x+\sqrt{y}=\sqrt{5}+2\sqrt{3}$.

*Exempl.* 11. Extrahatur radix cubica ex

18+

$18 + 8\sqrt{5}$. Siquidem $n = 3$, $A^2 = 324$, $B = 320$, erit

$$x = \frac{\sqrt[3]{18 + 8\sqrt{5}}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{18 + 8\sqrt{5}}} = \frac{3,298 \pm 0,482}{2}$$

$$1,890 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \ \& \ \frac{9}{\sqrt[3]{16}} - \sqrt[3]{4} = \frac{5}{\sqrt[3]{16}} = y; \text{ adeoq;}$$

$$x + \sqrt{y} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}.$$

*Exempl.* 12. Extrahatur radix biquadratica ex $196 + 80\sqrt{6}$. Quoniam $n = 4$, $A^2 = 38416$, $B = 38400$,

$$\text{erit } x = \frac{\sqrt[4]{196 + \sqrt{38400}}}{2} \pm \frac{2}{2\sqrt[4]{196 + \sqrt{38400}}} =$$

$$\frac{4,449 \pm 0,449}{2} = 2, \ \& \ y = 4 + 2; \text{ adeoque}$$

$x + \sqrt{y} = 2 + \sqrt{6}$.

*Exempl.* 13. Extrahatur radix quintæ potentiæ ex $80\sqrt{5} + 176$. Cum $n = 5$, $A^2 = 32000$, $B = 30976$,

$$\text{erit } x = \frac{\sqrt[5]{80\sqrt{5} + 176}}{2} \pm \frac{4}{2\sqrt[5]{80\sqrt{5} + 176}} =$$

$$\frac{3,236 \pm 1,236}{2} = 1, \ \& \ y = 5, \text{ hinc } x + \sqrt{y} =$$

$1 + \sqrt{5}$.

Coroll. I. Ex inductione exemplorum apparet, alterutram partium radicis binomiæ futuram esse rationalem, quando fractiones decimales membrorum valoris τȣ $x$, vel simul sumtæ unitatem con-

constituant (Exempl. 1. & 8.), vel sibi invicem sint æquales (Exempl. 2, 9, 12, 13.); in ceteris casibus neutram dictarum partium fore rationalem.

Coroll. 2. Cum valor τȣ̃ $x$ sit v. gr. in Exemplo. 1. $= 2$, signo $\pm$ affirmative sumto; sit autem $= 1,732$ sive $\sqrt{3}$, eodem negative accepto; & radix ibidem detecta deprehendatur esse $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; evidens est, in formula valoris τȣ̃ $x$, $\frac{\sqrt{n:A+\sqrt{B}}}{2} \mp \frac{\sqrt{n:A^2-B}}{2\sqrt{n:A+\sqrt{B}}}$, valores ambarum partium radicis quæsitæ includi.

## SCHOLION I.

Inde tamen non erit concludendum, minus necessariam esse formulam $x^2 \pm \sqrt{n:A^2-B}$, quam pro quantitate $y$ determinanda communicavimus. Substituto enim in eadem valore τȣ̃ $x$ jam antea detecto, mirifice abbreviatur & levatur labor, quo alias defungi necessum haberemus circa quantitatem $y$ eruendam. Ubi insimul erit observandum, constantem dari relationem inter binas illas, pro quantitatibus $x$ & $y$ inveniendis, exhibitas formulas; ita quidem, ut signo $\pm$ affirmative sumto in una illarum, idem in altera semper negative sit accipiendum.

Coroll. 3. Extrahendo radicem quadratam ex $6+\sqrt{24}$ (Exempl. 6.) deprehendimus eandem esse $=\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{3}}$; unde apparet, partes radicis

 desi-

desideratæ ipsas ex surdis compositis esse radices, quoties videlicet exponens radicis extrahendæ $n$ est numerus par, & quantitates $A$ & $\sqrt{n:A^2-B}$ rationem irrationalem inter se habent.

Coroll. 4. Contra neutrum membrorum radicis quæsitæ erit radix ex surda composita, quando in extrahenda radice, cujus exponens $n$ est numerus par, ex surda composita, inter $A$ & $\sqrt{n:A^2-B}$ ratio obtinet rationalis; ita ut, cum $A$ est numerus rationalis, $\sqrt{n:A^2-B}$ etiam sit numerus rationalis (Exempl. 1, 2, 3, 4, 12.); & cum $A$ est quantitas surda, $\sqrt{n:A^2-B}$ sit surda eidem communicans. (Exempl. 5. ).

Coroll. 5, Si autem exponens radicis extrahendæ $n$ sit numerus impar; tam irrationalis quam rationalis inter quantitates $A$ & $\sqrt{n:A^2-B}$ intercedens ratio dabit radicem, cujus neutra pars erit radix ex surda composita. (Exempl. 11.)

## SCHOLION II.

Solutio præsentis Problematis nec tædiosa nec difficilis obveniet ei, qui doctrinam Logarithmorum sibi familiarem antea reddidit. Quantam vero hoc problema præstet utilitatem, in constructionibus præsertim Geometricis, levi opera ostendi posset, si instituti ratio permitteret.

Habes jam heic, Benevole Lector, stilo plano

&

& ſimplici, qualem materiæ indoles admiſit, expoſita potiora Doctrinam Quantitatum Surdarum ſpectantia. Quem hæc ipſa Doctrina inter ceteras Mathematicas olim tenuerit, quemque hodienum, poſt inventum Calculum Infiniteſimalem, inter easdem tueatur locum, determinare ſuperſedemus. E re noſtra magis erit, aperte & ingenue confiteri, quod in eadem explananda Celebratiſſimorum Mathematicorum veſtigia preſſerimus. Tantum vero nobis non ſumimus, ut arbitraremur nos radiolos quosdam emittere potuiſſe, ubi lumen Horum defecit; probe contenti, ſi oculi noſtri quædam eorum diſtincte videre potuerint, quæ jubar Tantorum Virorum colluſtravit. Si autem nihilo minus Humanitas & Benevolentia Lectoris, nos vel tantillam ſymbolam ſubſtratæ materiæ dilucidandæ attuliſſe, judicaverit, id lucrati fuimus, de quo in ſinu nobis gratulabimur.

---

Pag. 4. lin. 24. leg. reſiduum vel ejus ſubmultiplum.

[illegible]

[illegible] Hominibus [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Vacuum [illegible] [illegible] [illegible] de quibus [illegible]

[illegible].

Pag. 4. lin. 24. leg. relabens vel ejus [illegible]